Gyorsjegyzet2:

- Ívhossz, vonalintegrál, munka-tétel.

Pl: Számítsd ki a következő csavarvonal ívhosszát: $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ a $t \in [0,6\pi]$ intervallumon!

Pl: Paraméterezd fel az $A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$ pontokat összekötő csavarvonalat! Legyen 1 menetemelkedésű és az óramutató járásával ellentétes. Számítsd ki a görbe vonalintegrálját $\underline{F}\left(\underline{r}(t)\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ vektortérben!

Pl: Paraméterezd fel az $A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$ pontokat összekötő szakaszt! Számítsd ki a görbe (itt egyenes szakasz) vonalintegrálját $\underline{F}\left(\underline{r}(t)\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ vektortérben! (Tipp: először írd fel az A és B pontokon átmenő egyenes egyenletét, majd gondold végig, a paraméter milyen intervallumon vehet fel értékeket.)

- grad, rot, div: skalár-mező gradiense és vektormező rotációja, és divergenciájának kiszámítása. $\underline{\nabla}$ vektor-operátor.

Pl: (Skalár)-potenciálos-e az $\underline{a}\sin(r)$ vektor-mező, ha $\underline{a}$ konstans vektor?

(Potenciálos, ha felírható egy skalár-mező gradiendseként: $\underline{a}\sin(r) = -\mathrm{grad}(\phi)$. Ehhez elégséges feltétel, ha a vektormező rotációja zérus)

Pl: Forrásmentes-e az $\underline{a} \times \underline{r}$ vektor-mező, ha $\underline{a}$ konstans vektor?

(Forrásmentes és „összenyomhatatlan” (illetve vektor-potenciálos), ha felírható egy vektor-mező rotációjaként. Ehhez elégséges feltétel, ha a divergenciája zérus.)

- Henger (palás, alap), gömb, sík, stb felparaméterezése.

Pl: írd fel az $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ pontokon lévő sík egyenletét (paraméterezd fel a síkot)!

Pl: Paraméterezd fel, az origó középpontú, R sugarú gömböt úgy, hogy z-komponense csak pozitív értékeket vehessen fel! (Ekkor egy félgömböt kell kapnunk, ami az x-y síkon „fekszik”)

- 2 paraméteres vektor-skalár függvények, térgörbe felszíne:

$$A = \int_D dA = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \left|\underline{r}_u'(u,v) \times \underline{r}_v'(u,v)\right| du\, dv$$

2 változós (paraméteres) függvény kettős integrálja:

$$\int_D f(x,y) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\, dx\, dy$$

Itt a paraméterek terében akár függvényekkel is megadhatjuk, hogy a paraméterek (változók) milyen értékeket vehessenek fel. Pl: Számítsuk ki $f(x,y) = x^2 - y^2$ integrálját az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által bezárt paraméter-tartományra. Ha $f(x,y) = 1$, akkor az integrállal a függvények által bezárt területet tudjuk kiszámolni.

Kettős integrál négyszög tartományon: az „egyszerűbb eset”, a paraméter tartomány négyszög alakú (pl nem függ egyik paraméter a másiktól, ilyenkor az integrálások sorrendje felcserélhető…):

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y);\;\; D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\; a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

$$\int_D f(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dx\, dy$$

<u>Kettős integrál transzformációja:</u>

$$x: (u,v) \mapsto x(u,v)$$
$$y: (u,v) \mapsto y(u,v)$$
$$(x,y) \in T \subset \mathbb{R}^2;\;\; (u,v) \in T' \subset \mathbb{R}^2$$

$$\iint_T f(x,y)\, dxdy = \iint_{T'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv,$$

ahol $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ a Jacobi determináns:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Kettős integrál további alkalmazása: <u>Síklemez tömegközéppontjának koordinátái</u>:
Pl: $\rho(x,y)$ a lemez sűrűsége, ami változhat pontról pontra… Ekkor a súlypont koordinátái:

$$x_s = \frac{\iint_T \; x\rho(x,y)\, dxdy}{\iint_T \; \rho(x,y)\, dxdy};\; y_s = \frac{\iint_T \; y\rho(x,y)\, dxdy}{\iint_T \; \rho(x,y)\, dxdy}$$

- Vektormező felületre vett integrálja:

$$\iint_F \underline{F} d\underline{A} = \iint_D \underline{F}\left(\underline{r}(u,v)\right)\left(\underline{r}_u'(u,v) \times \underline{r}_v'(u,v)\right) dudv$$

$$F = \left\{ \underline{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix};\;\; u,v \in D \right\}$$

Ívhossz $$S = \int_{t_1}^{t_1} \left|\underline{r}'(t)\right| dt$$	Felületi integrál $$A = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \left|\underline{r}_u'(u,v) \times \underline{r}_v'(u,v)\right| du\, dv$$
Vektormező vonalintegrálja $$W = \int_{t_1}^{t_1} \underline{F}\left(\underline{r}(t)\right) \underline{r}'^{(t)} dt$$	Vektormező felületi integrálja $$\Phi = \iint_D \underline{F}\left(\underline{r}(u,v)\right)\left(\underline{r}_u'(u,v) \times \underline{r}_v'(u,v)\right) dudv$$