Kvantummechanika gyakorlat
(2012/13 őszi félév)

2. óra

1. feladat: Határozzuk meg a perdület z komponensének sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

Megoldás: Az impulzusmomentum operátor és annak z komponense:

$$\underline{\hat{L}} = \underline{\hat{r}} \times \underline{\hat{p}} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\Big(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\Big).$$

A sajátértékfeladat:

$$\hat{L}_z \Psi = K \cdot \Psi.$$

Az egyenlet megoldása előtt térjünk át gömbi polárkoordinátákra!

$$x = r\sin\theta\cos\phi,$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi,$$

$$z = r\cos\theta.$$

Számítsuk ki a következő deriváltat (alkalmazva a közvetett függvény differenciálási szabályát):

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\phi} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\phi} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\phi} = -r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial\Psi}{\partial x} + r\sin\theta\cos\phi\frac{\partial\Psi}{\partial y} = x\frac{\partial\Psi}{\partial y} - y\frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

vagyis

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

Így a sajátértékegyenlet leegyszerűsödik:

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} = K \cdot \Psi,$$

melynek megoldása

$$\Psi(r,\theta,\phi) = f(r,\theta)e^{\frac{i}{\hbar}K\phi}.$$

A ϕ szög ciklikussága miatt teljesülnie kell, hogy

$$\Psi(r,\theta,\phi+2\pi) = \Psi(r,\theta,\phi),$$

amelyből a sajátértékekre kapunk megszorítást. Utóbbi relációból következik, hogy

$$K/\hbar = m \qquad (\text{ egész szám }),$$

HF1: Ez utóbbi összefüggést belátni az előző órai levezetés alapján!

ahonnan a keresett sajátérték és a hozzátartozó sajátfüggvény:

$$K_m = m \cdot \hbar; \qquad \Psi_m = f(r,\theta)e^{im\phi}$$

Az $f(r,\theta)$ függvény (majdnem) tetszőleges, de a normálási feltételnek teljesülnie kell. Az m. sajátértékhez tartozó sajátfüggvényt Ψ_m -mel jelölve:

$$(\Psi_m, \Psi_m) = \int d^3r \Psi_m^* \Psi_m = \int d^3r f^*(r,\theta) e^{-im\phi} f(r,\theta) e^{im\phi} = \int d^3r |f(r,\theta)|^2 =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta |f(r,\theta)|^2 = 1.$$

HF2: A 4. '='-nél felírtuk az integrálokat a gömbi polárkoordinátákra. Ellenőrizzük!

2. feladat: Egy részecske perdületének z komponensére $\hbar$, $2\hbar$ és $3\hbar$ értékeket mérhetünk egy kísérletben. Az egyes mérések valószínűségére teljesül, hogy $P_\hbar = 2P_{2\hbar} = \frac{1}{2}P_{3\hbar}$. Írjuk fel a részecske kvantumállapotát!

Megoldás: A feltétel szerint a pertület z komponensének sajátfüggvényei szerinti kifejtésben csak 3 tag van:

$$\Psi = \sum_i c_i \Psi_i = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + c_3\Psi_3.$$

Mivel a kifejtési együtthatók abszolútértéknégyzete maga a mérési valószínűség, ezért:

$$P_\hbar = \frac{2}{7} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = \sqrt{\frac{2}{7}} e^{i\alpha_1},$$

$$P_{2\hbar} = \frac{1}{7} \qquad \Longrightarrow \qquad c_2 = \sqrt{\frac{1}{7}} e^{i\alpha_2},$$

$$P_{3\hbar} = \frac{4}{7} \qquad \Longrightarrow \qquad c_3 = \frac{2}{\sqrt{7}} e^{i\alpha_3},$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tetszőleges szögek. A hullámfüggvény ezzel:

$$\Psi(r,\theta,\phi) = f(r,\theta)\Big[\sqrt{\frac{2}{7}} e^{i\alpha_1} e^{i\phi} + \sqrt{\frac{1}{7}} e^{i\alpha_2} e^{2i\phi} + \frac{2}{\sqrt{7}} e^{i\alpha_3} e^{3i\phi}\Big].$$