Kvantummechanika gyakorlo feladatok 1

1. Keressük meg azt az $\hat{U}_{\varphi_0}$ operátort, mely a φ gömbi polárszöget egy φ_0 konstans szöggel elforgatja, vagyis melyre $\hat{U}_{\varphi_0}\psi(r,\theta,\varphi) = \psi(r,\theta,\varphi+\varphi_0)$!

2. Számítsuk ki a

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}}|x|, & \text{ha } |x| < 1, \\ 0, & \text{ha } |x| \geq 1 \end{cases}$$

hullámfüggvénnyel jellemzett kvantumállapotban annak a valószínűségét, hogy az impulzus a $[0, \Delta k]$ kicsiny intervallumba esik!

3. Mutassuk meg, hogy egy valós paraméterrel jellemzett koherens állapot a harmonikus oszcillátor alapállapoti hullámfüggvényének eltoltja! Mi az adódó eltolás paramétere?

4. Adjunk meg egy olyan fizikai állapotot, melyben a részecske impulzus-momentumának z-komponensére egyforma valószínűséggel $\hbar$, $4\hbar$ és $7\hbar$ mérhető!

5. Írjuk fel a

$$\psi(x) = A\sin\left(\frac{4\pi}{d}x\right)\cos\left(\frac{4\pi}{d}x\right)$$

állapotot periódikus határfeltétel mellett impulzus sajátállapotok lineáris kombinációjaként! Mekkora A értéke, ha fizikai állapotról van szó?

6. Mutassuk meg, hogy egy koherens állapot az idő előrehaladtával is koherens állapot marad! Az ehhez tartozó részfeladatok a következőek:

a., Számítsuk ki az $[\hat{a}, \hat{H}]$ kommutátort, ahol $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ a harmonikus oszcillátor Hamilton operátora!

b., Lássuk be a $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{a}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \hat{a}e^{-i\omega t}$ operátor egyenlőséget!

c., Bizonyítsuk, hogy ha $\Psi(0,x)$ koherens állapot, akkor $\Psi(t,x) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\Psi(0,x)$ is az!

7. Egy részecske kvantumállapotának síkhullámok szerinti kifejtési-együttható függvénye a következő:

$$\tilde{\psi}(k) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |k| > 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{ha } |k| \leq 1. \end{cases}$$

Adjuk meg a részecske hullámfüggvényét!